

# Bac blanc

Coefficient : 3

## Exercice N°1 : ( 2.5 pts )

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse proposée est exacte.

L'exercice consiste à choisir la réponse exacte **avec justification**.

1/ La fonction  $x \mapsto 3e^{2x}$  est solution de l'équation différentielle :

- a)  $y' = 4y$                       b)  $y' - 2y = 0$                       c)  $y' = 3y$

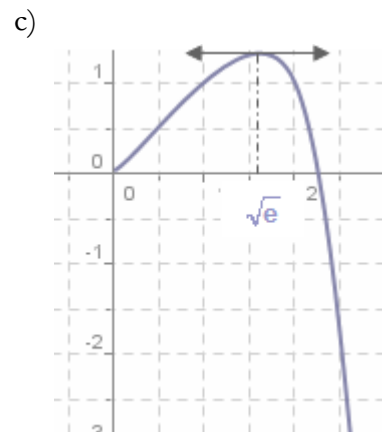
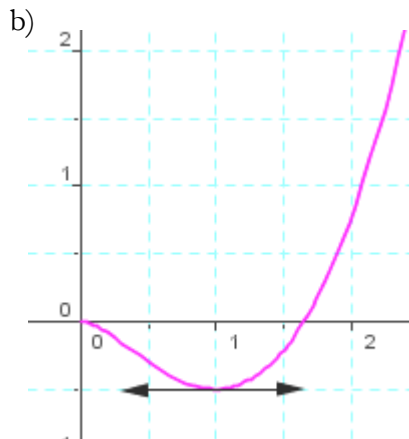
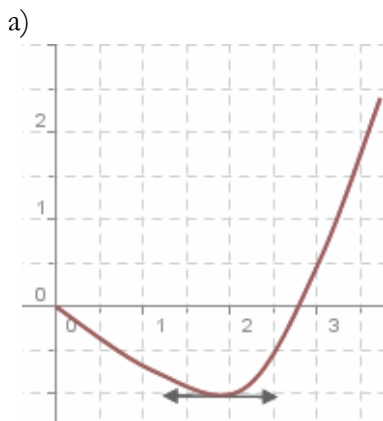
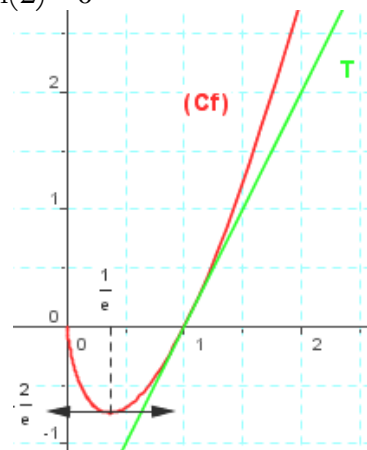
2/ La fonction  $x \mapsto 2^x$  est solution de l'équation différentielle :

- a)  $y' = 2y$                       b)  $y' - y \ln(2) = 0$                       c)  $y' + y \ln(2) = 0$

3/ La courbe ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'une fonction  $f$  définie  $[0; +\infty[$  et dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

L'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .



## Exercice N°2 : ( 3 pts )

Une étude statistique a prouvé que la durée d'un appel téléphonique  $X$  (exprimée en minutes) suit une loi exponentielle de paramètre  $0,3$ .

- 1/ Calculer la probabilité qu'un appel dure entre deux et cinq minutes
- 2/ Calculer la probabilité qu'un appel dépasse cinq minutes
- 3/ Calculer la probabilité qu'un appel ne dépasse pas 20 minutes sachant qu'il a dépassé 7 minutes
- 4/ On sait qu'une minute d'appel coûte 0,125 dinars.  
Calculer la probabilité que le coût d'un appel dépasse 2 dinars.

### **Exercice N°3 : ( 4.5 pts )**

Une urne contient six boules : quatre blanches et deux jaunes, toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard quatre boules de l'urne.

1/ Calculer la probabilité des événements suivants :

A « n'obtenir aucune boule jaune »

B « Obtenir au moins deux boules jaunes »

2/ On note  $X$  la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches tirées .

a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

b) Calculer l'espérance mathématique de  $X$

c) Vérifier que :  $P(X \geq 3) = \frac{3}{5}$

3/ On répète l'épreuve précédente trois fois de suite en remettant à chaque fois les quatre boules tirées dans l'urne et on désigne par  $Y$ , l'aléas numérique prenant pour valeur le nombre d'épreuves donnant au moins trois boules blanches.

a) Etablir la loi de probabilité de  $Y$

b) Calculer  $\sigma(Y)$

c) Calculer la probabilité qu'au moins une épreuve donne au moins trois boules blanches.

### **Exercice N°4 : ( 5 pts )**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x+2)e^{-x}$

On désigne par  $(\zeta_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ . Interpréter les résultats.

b) Vérifier que  $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

c) Dresser le tableau de variation de  $f$

2/a) Préciser les coordonnées des points d'intersections de  $(\zeta_f)$  avec les axes du repère

b) Tracer  $(\zeta_f)$

3/ Soit  $F$  la fonction définie sur  $[-2 ; +\infty[$  par  $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$

a) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $[-2 ; +\infty[$  et calculer  $F'(x)$  puis déduire la variation de  $F$

b) En utilisant une intégration par partie Montrer que  $F(x) = e^2 - (x+3)e^{-x}$

c) Déduire l'aire de la partie du plan limitée par  $(\zeta_f)$ , l'axe des abscisses et les droites  $x=0$  et  $x=-2$

## Exercice N°5 :( 5 pts )

Le tableau suivant donne la dépense, en millions de dinars, des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 2001 à 2010.

|                       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Année                 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 |
| Rang de l'année $x_i$ | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
| Dépense $y_i$         | 398  | 451  | 423  | 501  | 673  | 956  | 1077 | 1255 | 1427 | 1500 |

1/a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i, y_i)$  dans un repère orthogonal tel que 2 cm représentent une année en abscisse et 1 cm représente 100 millions de dinars en ordonnée.

b) Vérifier qu'une équation de la droite d'ajustement affine D de y en x par la méthode de Mayer est :  $D: y = 150,76x + 187,68$

c) En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation de la dépense des ménages en produits informatiques en 2011.

2/ L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose  $z_i = \ln y_i$

Les résultats seront arrondis à  $10^{-2}$  près.

a) Recopier et compléter le tableau suivant

|                       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Année                 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 |
| Rang de l'année $x_i$ | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
| $z_i = \ln(y_i)$      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |

b) Donner la valeur du coefficient de corrélation linéaire de la série  $(x_i, z_i)$ . Interpréter.

c) Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés

d) Exprimer alors y en fonction de x puis donner une estimation de la dépense des ménages en million de dinars en produits informatiques en 2011.

3/ En 2011 les ménages ont dépensé 68,9 milliards de dinars pour la culture, les loisirs et les sports et 2,8 % de ces dépenses concernent les produits informatiques.

Avec lequel des deux ajustements l'estimation faite est-elle la meilleure ?

## Exercice N°1

1/ b) car :  $y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y \Leftrightarrow y(x) = ke^{2x}$  ;  $k \in \mathbb{R}$

2/ b) car :  $y' - y \cdot \ln(2) = 0 \Leftrightarrow y' = y \cdot \ln(2) \Leftrightarrow y(x) = ke^{\ln(2)x} \Leftrightarrow y(x) = k \cdot 2^x$  ;  $k \in \mathbb{R}$

3/ b) car : f s'annule en 1 donc la courbe de F admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1

## Exercice N°2

1/  $P(2 \leq X \leq 5) = e^{-0.3 \times 2} - e^{-0.3 \times 5} = 0.325$

2/  $P(X \geq 5) = e^{-0.3 \times 5} = 0.223$

3/  $P(\{X \leq 20\} / \{X \geq 7\}) = \frac{P(\{X \leq 20\} \cap \{X \geq 7\})}{P(X \geq 7)} = \frac{P(7 \leq X \leq 20)}{P(X \geq 7)} = \frac{e^{-0.3 \times 7} - e^{-0.3 \times 20}}{e^{-0.3 \times 7}} = 0.979$

4/ Le coût de 16 mn est 2 dinars

$$P(X \geq 16) = e^{-0.3 \times 16} = 0.008$$

## Exercice N°3

1/  $A = \{B, B, B, B\}$  d'où  $P(A) = \frac{C_4^4}{C_6^4} = \frac{1}{15}$

$$B = \{J, J, B, B\} \quad \text{d'où} \quad P(B) = \frac{C_2^2 \times C_4^2}{C_6^4} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

2/a)

$$X(\Omega) = \{2, 3, 4\}.$$

$$P(X = 2) = P(B) = \frac{2}{5}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_2^1 \times C_4^3}{C_6^4} = \frac{8}{15}$$

$$P(X = 4) = P(A) = \frac{1}{15}$$

b)  $E(X) = 2 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{8}{15} + 4 \times \frac{1}{15} = \frac{8}{3}$

c)  $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{8}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{5}$

3/ Y suit une loi binomiale de paramètres  $n = 3$  et  $p = P(X \geq 3) = \frac{3}{5}$

a)  $P(Y = k) = C_n^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{3-k}$  ;  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

b)  $\sigma(Y) = \sqrt{3 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

c)  $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{117}{125} = 0.936$

| $x_i$        | 2             | 3              | 4              |
|--------------|---------------|----------------|----------------|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |

## Exercice N°4

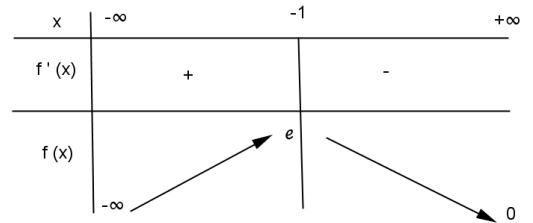
1/a) \*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} = 0$  d'où  $y=0$  et une A.H à  $\zeta_f$  au  $V(+\infty)$

\*  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2) \cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{xe^x} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^-$

D'où  $\zeta_f$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

b)  $f'(x) = e^{-x} + (x+2) \cdot (-e^{-x}) = e^{-x} - (x+2)e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$

c)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1+x = 0 \Leftrightarrow x = -1$



2/a)

$$M(x, y) \in \zeta_f \cap (0; \vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$M(x, y) \in \zeta_f \cap (0; \vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(0) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

3/

$t \mapsto f(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $[-2, +\infty[$

D'où  $F$  est dérivable sur  $[-2, +\infty[$

Donc  $F'(x) = f(x) = (x+2)e^{-x} \geq 0$  pour  $x \in [-2, +\infty[$

D'où  $F$  est croissante sur  $[-2, +\infty[$

b)

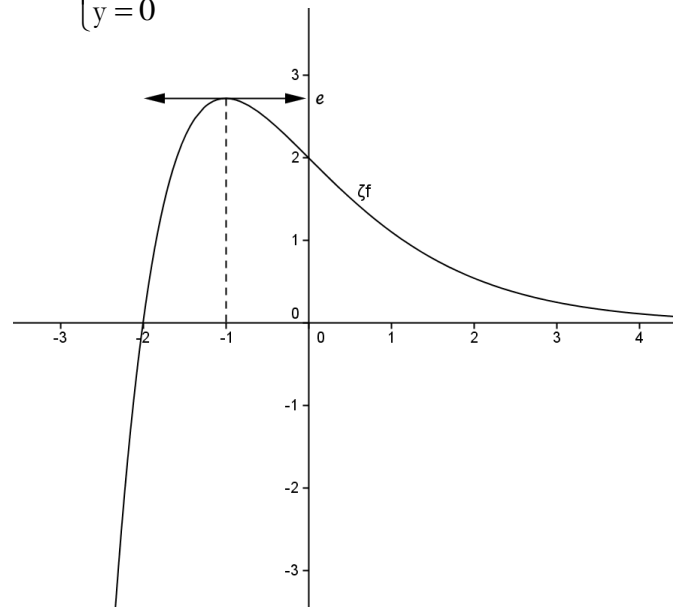
$$F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt = \int_{-2}^x (t+2)e^{-t} dt$$

On pose  $u(t) = t+2$  donc  $u'(t) = 1$

$$v'(t) = e^{-t} \text{ donc } v(t) = -e^{-t}$$

$$F(x) = \left[ -(t+2)e^{-t} \right]_{-2}^x - \int_{-2}^x -e^{-t} dt = -(x+2)e^{-x} - 0 - \left[ e^{-t} \right]_{-2}^x = -(x+2)e^{-x} - (e^{-x} - e^2) = e^2 - (x+3)e^{-x}$$

d)  $A = \int_{-2}^0 f(t) dt = F(0) = e^2 - 3$  u.a



## Exercice N°5

b) Par la méthode de Mayer on a :

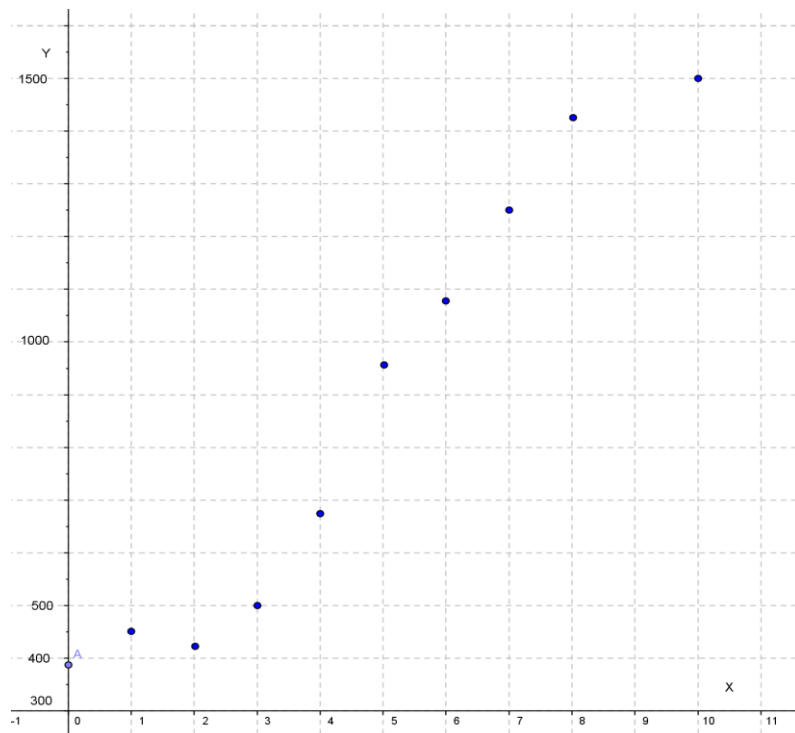
$$G_1(2; 489.2) \text{ et } G_1(7; 1243)$$

D :  $y = ax + b$  tel que

$$a = \frac{1243 - 489.2}{7 - 2} = 150.76$$

$$\text{et } b = 489.2 - 2 \times 150.76 = 187.68$$

$$\text{D'où } D : y = 150.76x + 187.68$$



c) Pour l'année 2011 on a  $x=10$   $y = 150.76 \times 10 + 187.68 = 1695.28$

2/a)

|                       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Année                 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 |
| Rang de l'année $x_i$ | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
| $z_i = \ln(y_i)$      | 5.99 | 6.11 | 6.05 | 6.22 | 6.51 | 6.86 | 6.98 | 7.13 | 7.26 | 7.31 |

b)  $r_{xz} = \frac{\text{cov}(x, z)}{\sigma(x) \cdot \sigma(z)} = 0.97$  donc  $r \geq 0.86$  donc il ya une forte corrélation linéaire entre  $x$  et  $z$

c)

$$z = ax + b \text{ avec } a = \frac{\text{cov}(x, z)}{V(x)} = 0.17 \text{ et } b = \bar{z} - a\bar{x} = 5.88$$

$$\text{donc } z = 0.17x + 5.88$$

d)

$$z = \ln(y) \Leftrightarrow y = e^z \Leftrightarrow y = e^{(0.17x + 5.88)}$$

$$\text{Pour } x = 10 \text{ on a alors } y = e^{(0.17 \times 10 + 5.88)} = 1958.63$$

3/ Les dépenses réels en 2011 sont  $68900 \times 2.8\% = 1921.2$  millions de dinars

La deuxième estimation est plus proche au valeur réelle d'où l'ajustement exponentielle est le plus pertinent